数理解析研究所講究録
978 巻 1997 年 115-127

ある不完備情報の決定問題について

中井 達

九州大学経済学部

1 不完備情報の決定問題

確率的決定問題，例えば最適停止問題・取り替え問題・信頼性などを考えるとき，複数の確率分布を比較することは問題を解析する上で必要である。また，不完備情報のもとで多段決定問題を考えるとき，これらの情報は集合の上の確率分布で表され，それらの情報の持つ価値を比較する必要がある。これらの確率分布の間に順序を導入して，最適政策をはじめその政策にしたがって得られる総期待利得の性質を考えることができる。これらの確率的順序関係についてはStoyan[19] でもまとめられ，待ち行列・信頼性など多くの確率モデルで応用されている。Ross[18] などでも考えられている。

2節では尤度比順序を考える。この順序は学習プロセスを考える上でも重要なもので，多くの問題で扱われている。特にベイズの理論に基づいた学習プロセスを考えるとき，事前情報 (Prior Information) と事後情報 (Posterior Information) の関係についての性質が知られ3節で述べる。この尤度比順序は TP_2の性質を持つとも言われ，Brown and Solomon[1] でも扱われている。

3節と4節では，一度に複数の標本値を観測できるときに，ベイズ理論を用いた学習プロセスでの事前情報と事後情報の関係について述べる。3節ではNakai[10, 11, 13]，中井 [15] などで扱われた結果をまとめて述べる。4節では3節とは異なり1度に複数の値を観測する場合であるが，それらの標本値を表す確率変数が独立でない場合の学習プロセスがどのようになるかについて考える。これらの問題を扱うときには MTP_2の概念を用いることができ，ここでもその方法にしたがう。この MTP_2については，いろいろと研究されており，Holley [3], Kemperman [8], Preston [16], Karlin and Rinott[5, 6] などがある。ここでは，動的決定問題を扱う上で必要となる基本的な性質について述べる。

2 部分観測可能なマルコフ連鎖

尤度比 (Likelihood Ratio) を用いて確率変数の間に順序を導入する。

定義 1 XとYを連続な非負確率変数とし，f_Xとf_Yをそれぞれの確率変数の確率密度関数とする。

$x \geq y$なら ,

$$\frac{f_X(y)}{f_Y(y)} \leq \frac{f_X(x)}{f_Y(x)} \qquad \text{または} \qquad \begin{vmatrix} f_X(x) & f_Y(y) \\ f_X(y) & f_Y(y) \end{vmatrix} \geq 0$$

となるとき，確率変数Xは確率変数Yより尤度比の意味で大きいと言い$X \geq_l Y$と表す。

定義 1で導入された順序を尤度比順序という。この順序は確率過程を考えるとき，TP_2(Total Positivity of Order 2) と呼ばれる。(Karlin[4], Karlin and Taylor [7]) 非負整数全体 $\{1, 2, \cdots\}$ の上での確率分布全体

$$\mathcal{S} = \{\Phi \,|\, \Phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \cdots), \phi_s \geq 0, \sum_{s=0}^{\infty} \phi_s = 1\}$$

に含まれる 2 つの確率分布$\boldsymbol{\Phi}$と$\boldsymbol{\Psi}$に対し，$\boldsymbol{\Phi} \geq_l \boldsymbol{\Psi}$は次のように定義できる。

定義 2 $\mathcal{S}$に含まれる任意の$\boldsymbol{\Phi}$と$\boldsymbol{\Psi}$に対し，$\boldsymbol{\Phi} >_l \boldsymbol{\Psi}$ とは全ての i と jに対し ($i \leq j$, $i, j = 1, 2, \cdots$),

$$\phi_j \psi_i \geq \phi_i \psi_j \text{ すなわち } \begin{vmatrix} \phi_j & \psi_j \\ \phi_i & \psi_i \end{vmatrix} \geq 0 \tag{1}$$

が成立し，少なくとも一つの i と jの組み合わせに対し

$$\phi_j \psi_i > \phi_i \psi_j,$$

が成り立つ場合をとする。$\phi_i = \psi_i$が任意の $i = 1, 2, \cdots$に対し成り立つとき$\boldsymbol{\Phi} =_l \boldsymbol{\Psi}$とする。$\boldsymbol{\Phi} \geq \psi_l \boldsymbol{\Psi}$とは，$\boldsymbol{\Phi} =_l \boldsymbol{\Psi}$ で$\boldsymbol{\Phi} >_l \boldsymbol{\Psi}$が成り立つときをいう。

補題 1 定義 2で定義した順序は半順序となる。

マルコフ連鎖で，その状態を直接に知ることはできないが，ある情報プロセスを通して，その状態の情報が得られるとき，これを部分観測可能なマルコフ連鎖という。この部分観測可能なマルコフ連鎖の基本的な性質は Nakai [10, 11] などで解析され，Nakai [13] では部分観測可能なマルコフ連鎖のもとでの確率的な動的決定モデルが扱われている。

マルコフ連鎖の状態全体を $\{0,1,2,\cdots\}$ とし，$\boldsymbol{P}=(p_{s\,s'})_{s,s'=0,1,2,\cdots}$ をその推移確率行列とする。このマルコフ連鎖の状態により変化する確率変数の標本値を知って，このマルコフ連鎖の状態についての情報を得る。このプロセスを情報プロセスという。マルコフ連鎖の状態が s のとき，この状態で定まる非負確率変数を X_s とおけば，この確率変数は分布関数

$$\Pr\left(X_s \leq x | Y_n = s\right) = F_s(x) \quad (x \in \boldsymbol{R}, s \in \{0,1,2,\cdots\}, n \in \{0,1,2,\cdots\}) \tag{2}$$

で定まり，確率密度関数 $f_s(x)$ をもつとする。ここで Y_n は時刻 n でのマルコフ連鎖の状態を表す確率変数とする。

部分観測可能なマルコフ連鎖の状態についての情報は，状態全体の集合での確率分布 $\boldsymbol{\Phi}=(\phi_0,\phi_1,\phi_2,\cdots)$ で表され $\left(\phi_i \geq 0, \sum_{s=0}^{\infty}\phi_s = 1\right)$，それら全体の集合 $\mathcal{S}$ には定義 2 の尤度比による順序を仮定する。

このマルコフ連鎖の状態について，情報プロセスから得られた標本値 x と事前分布 $\boldsymbol{\Phi}$ に対し事後分布が存在し，その学習プロセスはベイズの定理にしたがう。すなわち，ベイズ学習である。

部分観測可能なマルコフ連鎖の状態についての事前情報が $\boldsymbol{\Phi}$ のとき，マルコフ連鎖の状態が推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ にしたがって推移し，標本値 x $(\in \boldsymbol{R}_+ = (0,\infty))$ が得られたとする。このとき，マルコフ連鎖の状態についての事後情報を $\boldsymbol{T}(\overline{\boldsymbol{\Phi}}|x)$ とする。

事前情報が $\boldsymbol{\Phi}$ のとき，このマルコフ連鎖は推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ にしたがって状態が推移し，このマルコフ連鎖の状態についての情報は

$$\begin{cases} \overline{\phi}_{s'} &= \sum_{s=0}^{\infty} \phi_s p_{s\,s'}, \\ \overline{\boldsymbol{\Phi}} &= (\overline{\phi}_0, \overline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \cdots) \end{cases} \tag{3}$$

となる。

つぎに，標本値 x からベイズの定理を用いて事後分布 $\boldsymbol{T}(\overline{\boldsymbol{\Phi}}|x)$ は，すべての $s'=0,1,2,\cdots$ に対し

$$\begin{cases} T_{s'}\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle| x\right) &= \dfrac{\overline{\phi}_{s'} f_{s'}(x)}{\sum_{s=0}^{\infty}\overline{\phi}_s f_s(x)} \\ \boldsymbol{T}(\overline{\boldsymbol{\Phi}}|x) &= \left(T_0\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle| x\right), T_1\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle| x\right), T_2\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle| x\right), \cdots\right) \end{cases} \tag{4}$$

となる。

つぎの 3 つの仮定を設け，事前情報と事後情報の関係を求める。

仮定 1 マルコフ連鎖の状態が s のとき，条件付の期待値 $\mu_s = \mathrm{E}[X|S=s]$ は有限とする。確率分布関数 $\Pr\{X \leq x | S = s\} = F_s(x)$ は絶対連続で，確率密度関数 $f_s(x)$

をもつ。すなわち, $dF_s(x) = f_s(x)\,dx$ とする。ここで, Sはマルコフ連鎖の状態を表す確率変数とする。

仮定 2 確率変数 $\{X_s\}_{s=0,1,2,\cdots}$に対し, $s \le s'$なら $(s, s' = 0, 1, 2, \cdots)$ $X_s \ge_1 X_{s'}$とする。すなわち $x \le y$ のとき

$$f_{s'}(x)f_s(y) \le f_{s'}(y)f_s(x) \text{ すなわち } \begin{vmatrix} f_s(x) & f_s(y) \\ f_{s'}(x) & f_{s'}(y) \end{vmatrix} \ge 0 \tag{5}$$

とする。

仮定 3 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ に尤度比順序を仮定する。すなわち, 状態空間が $\{i|i = 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ のマルコフ連鎖とする。推移確率行列を $\{p_{ij}\}_{i,j=0,1,2,3,\cdots}$ とするとき, 尤度比順序を用いて次の関係を考える。任意の i, jに対し $(i \ge j, i, j = 0, 1, 2, \cdots)$

$$p_{mj}p_{ni} \ge p_{nj}p_{mi} \text{ すなわち } \begin{vmatrix} p_{ni} & p_{nj} \\ p_{mi} & p_{mj} \end{vmatrix} \ge 0 \tag{6}$$

が$m \le n\,(m, n = 1, 2, \cdots)$ を満たす全ての m と n に対し成り立つ。

注 1 $\{0, 1\}$ の 2 つの状態をとるマルコフ連鎖では, 仮定 3 は不等式

$$p_{00} \ge p_{10}$$

と等しい。この仮定は Ross [17], Monahan [9] などで用いられたもので, 仮定 3 はこの一般化となる。

情報全体の集合 $\mathcal{S}$で定義された関数 $u(\boldsymbol{\Phi})$ が, $\boldsymbol{\Phi} \ge_1 \boldsymbol{\Psi}$ を満たす $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Psi}$ に対し $u(\boldsymbol{\Phi}) \ge u(\boldsymbol{\Psi})$ のとき, この $u(\cdot)$ を $\boldsymbol{\Phi}$ に関する非減少関数という。

この学習プロセスについて, 仮定 1 と仮定 2, 仮定 3 のもとで (3) 式と (4) 式で与えられた事後情報の性質を求める。

定理 1 $x \le y$ を満たす任意のx, y に対し, それぞれの $\boldsymbol{\Phi}\,(\in \mathcal{S})$ について$\boldsymbol{T}(\overline{\boldsymbol{\Phi}}|\,x) \le_1 \boldsymbol{T}(\overline{\boldsymbol{\Phi}}|\,y)$ となる。

補題 2 $\mathcal{S}$に含まれる任意の $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}$ に対し, $\boldsymbol{\Phi} \ge_1 \boldsymbol{\Psi}$ なら$\overline{\boldsymbol{\Phi}} \ge_1 \overline{\boldsymbol{\Psi}}$ となる。

定理 2 $\mathcal{S}$に含まれる $\boldsymbol{\Phi}$ と $\boldsymbol{\Psi}$ に対し, $\boldsymbol{\Phi} \ge_1 \boldsymbol{\Psi}$ なら$\boldsymbol{T}(\overline{\boldsymbol{\Phi}}|\,x) \ge_1 \boldsymbol{T}(\overline{\boldsymbol{\Psi}}|\,x)$ となる $(x \in \boldsymbol{R})$。

つぎの補題は, 部分観測可能なマルコフ連鎖の上での動的決定モデルを解析するときに必要となる。

補題 3 $\{f_s(x)\}_{s=0,1,2,\cdots}$を確率密度関数の列とする。$\mathcal{S}$に含まれる$\boldsymbol{\Phi}$ と $\boldsymbol{\Psi}$ に対して $\boldsymbol{\Phi} \geq_1 \boldsymbol{\Psi}$ とし，$a_s = \phi_s - \psi_s$とおく $(s = 0, 1, 2, \cdots)$。

$$g(x) = \sum_{s=0}^{S} a_s f_s(x)$$

とすれば，任意の非減少関数 $h(x)$ に対し

$$\int_0^{\infty} h(x) \sum_{s=0}^{\infty} \phi_s f_s(x)\, dx \geq \int_0^{\infty} h(x) \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s f_s(x)\, dx$$

となる。

3　一度に複数の値を観測する場合の学習プロセス

つぎに，マルコフ連鎖の状態を直接知ることはできない。すなわち，部分観測可能なマルコフ連鎖を考える。このマルコフ連鎖の状態についての情報は，状態空間の上での確率分布$\boldsymbol{\Phi}$で表されている。すなわち，$\boldsymbol{\Phi} \in \mathcal{S} = \{\boldsymbol{\Phi} \mid \boldsymbol{\Phi} = (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \cdots), \phi_s \geq 0, \sum_{s=0}^{\infty} \phi_s = 1\}$ とする。それぞれの期で，観測する対象の大きさはマルコフ連鎖の状態に依存する確率変数で表されるから，これらの大きさから状態についての情報を得る。もし，1 つの対象も観測できなければ，情報は得られない。いま，マルコフ連鎖の状態についての事前情報を$\boldsymbol{\Phi}(\in \mathcal{S})$ とする。この最適選択モデルでは N期間に観測できる m 個の対象の中から，k個を選んで総期待利得を最大にする。もし，k個の対象が現れ，それらの大きさが $\{x_i\}_{i=1,\cdots,k}$とすれば，学習によって情報を $T(\overline{\boldsymbol{\Phi}}|x)$ と改良する。ここでは，学習プロセスとしてベイズの定理を用いる。

いま，マルコフ連鎖の状態についての情報が$\boldsymbol{\Phi}$とする。まず，マルコフ連鎖の状態は，推移確率行列$\boldsymbol{P}$にしたがって推移し，推移した後でのプロセスの状態についての情報$\overline{\boldsymbol{\Phi}}$は

$$\begin{cases} \overline{\phi}_{s'} &= \sum_{s=0}^{\infty} \phi_s p_{s\,s'}, \\ \overline{\boldsymbol{\Phi}} &= (\overline{\phi}_0, \overline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \cdots), \end{cases} \tag{7}$$

となる。

つぎに，このマルコフ連鎖の状態について，ベイズの定理にしたがって改良するから

$$\begin{cases} T_{s'}\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\, \boldsymbol{x}\right) = \dfrac{\overline{\phi}_{s'} f_{s'}(\boldsymbol{x})}{\sum_{s=0}^{\infty} \overline{\phi}_s f_s(\boldsymbol{x})} \\ T(\overline{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x}) = \left(T_0\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\, \boldsymbol{x}\right), T_1\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\, \boldsymbol{x}\right), T_2\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\, \boldsymbol{x}\right), \cdots\right) \end{cases} \tag{8}$$

となる。ここで，$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ とし，$f_t(\boldsymbol{x})$ をマルコフ連鎖の状態が t で，対象の大きさが$\boldsymbol{x}$のときの k個の確率変数の同時確率密度関数とする。

はじめに，情報全体の集合 $\mathcal{S}$に尤度比を用いて順序を定義する。この順序を，尤度比順序といい，Nakai [11, 12, 13, 14]，中井 [15] などで触れられている。また，Nakai [11, 12] では状態の数が有限な場合を扱い，Nakai [13] では状態の数が可算のマルコフ連鎖を扱っている。それぞれの期で観測できる確率変数が，独立で同一な確率分布関数にしたがうときは

$$f_t(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_t(x_i). \tag{9}$$

となる。

つぎに，$x_{(1)}, \cdots, x_{(k)}$を，k個の対象の大きさを表す確率変数 $X_1, \cdots, X_n$から得られた観測値 $x_1, \cdots, x_n$に対する順序統計量とする $(x_{(1)} \geq \cdots \geq x_{(k)})$。ここでは，便宜上，観測した k個の値を大きい方 から小さいものへと並べ替える。また，確率変数の列 $\{X_{(i)}\}_{i=1,\cdots,k}$ $\left(X_{(1)} \geq \cdots \geq X_{(k)}\right)$を，$\{X_i\}_{i=1,\cdots,k}$の代わりに用いる。

ここで，観測値の組に対しつぎの順序を考える。

定義 3 2つの k個の観測値の組$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^k$に対し $x_{(i)} \leq y_{(i)}$のとき $(i = 1, 2, \cdots, k)$，またそのときに限り$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$と表す。

補題 4 $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$を満たす任意の$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$に対し

$$f_j(\boldsymbol{y}) f_i(\boldsymbol{x}) \geq f_i(\boldsymbol{y}) f_j(\boldsymbol{x}) \text{ すなわち } \begin{vmatrix} f_i(\boldsymbol{x}) & f_j(\boldsymbol{x}) \\ f_i(\boldsymbol{y}) & f_j(\boldsymbol{y}) \end{vmatrix} \geq 0 \tag{10}$$

$i < j$ となる $(i, j = 1, 2, \cdots)$。

事後情報についてつぎの 3 つの性質が成り立つことが Nakai [14] で示されている。$n = 1$ の場合は，[11, 12] などで示されている。

定理 3 すべての$\boldsymbol{\Phi} \in \mathcal{S}$に対して，$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ならば $T\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}} \middle| \boldsymbol{x}\right) \leq_l T\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}} \middle| \boldsymbol{y}\right)$となる。

補題 5 任意の$\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathcal{S}$に対し，$\boldsymbol{\Phi} \geq_l \boldsymbol{\Psi}$ならば$\overline{\boldsymbol{\Phi}} \geq_l \overline{\boldsymbol{\Psi}}$である。

定理 4 すべての$\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^k$に対し，$\boldsymbol{\Phi} \geq_l \boldsymbol{\Psi}$ならば $T\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}} \middle| \boldsymbol{x}\right) \geq_l T\left(\overline{\boldsymbol{\Psi}} \middle| \boldsymbol{x}\right)$である。

4 一度に複数の値を観測する学習プロセス–MTP_2の場合

定義 4 k次元の確率変数 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_k)$ からの，2つの観測値の組$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^k$に対し $x_i \leq y_i$のとき $(i = 1, 2, \cdots, k)$，またそのときに限り$\boldsymbol{x}$は$\boldsymbol{y}$より小さいと言い$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$と表す。

仮定 4 マルコフ連鎖の状態が i のときに得られる観測値を表す確率変数を$\boldsymbol{X}^i$とし $(i=0,1,2,\cdots)$，それらの確率密度関数を $f_i(\boldsymbol{x})$ とする。このとき，

$$f_{i\wedge j}(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})f_{i\vee j}(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y})\geq f_j(\boldsymbol{y})f_i(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

が成り立つとき，この不完備情報のマルコフ連鎖は MTP_2であるという。ここで，$\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=(\min(x_1,y_1),\cdots,\min(x_k,y_k))$ および$\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y}=(\max(x_1,y_1),\cdots,\max(x_k,y_k))$ とする。

この仮定は，つぎのように表せる。すなわち，$i\leq j$なら $(i,j=0,1,2,\cdots,n)$

$$f_i(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})f_j(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y})\geq f_j(\boldsymbol{y})f_i(\boldsymbol{x}) \text{ すなわち } \begin{vmatrix} f_i(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}) & f_i(\boldsymbol{y}) \\ f_j(\boldsymbol{y}) & f_j(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y}) \end{vmatrix}\geq 0 \tag{12}$$

であり，

$$f_i(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})f_j(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y})\geq f_i(\boldsymbol{y})f_j(\boldsymbol{x}) \text{ すなわち } \begin{vmatrix} f_i(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}) & f_i(\boldsymbol{y}) \\ f_j(\boldsymbol{x}) & f_j(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y}) \end{vmatrix}\geq 0 \tag{13}$$

が成り立つ。この節で考える不完備情報のマルコフ連鎖では，このプロセスの状態が i のときに得られる標本値$\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_k)$ は，前節とは異なり必ずしも独立とは仮定しない。

この仮定を満たす不完備情報のマルコフ連鎖について，標本値$\boldsymbol{x}$から得られる事後情報についてつぎの性質が成り立つ。

定理 5 すべての$\boldsymbol{\Phi}\in\mathcal{S}$に対して，$T\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\boldsymbol{x}\right)$ は MTP_2である。

証明 $\mathcal{S}$での順序の定義から，任意の $s<s'$に対し $(s,s'=0,1,2,\cdots)$

$$T_s\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\right)T_{s'}\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y}\right)\geq T_{s'}\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\boldsymbol{x}\right)T_s\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\boldsymbol{y}\right)$$

が示されればよい。そのため，

$$T_s\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\right)T_{s'}\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y}\right)-T_{s'}\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\boldsymbol{x}\right)T_s\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\boldsymbol{y}\right)$$

を考える。この式の分母を払えば

$$\begin{aligned}&\overline{\phi}_s f_s(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})\overline{\phi}_{s'}f_{s'}(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y})-\overline{\phi}_{s'}f_{s'}(\boldsymbol{x})\overline{\phi}_s f_s(\boldsymbol{y})\\ &\qquad=\ \overline{\phi}_s\overline{\phi}_{s'}\left(f_s(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})f_{s'}(\boldsymbol{x}\vee(\boldsymbol{y})-f_{s'}(\boldsymbol{x})f_s(\boldsymbol{y})\right)\geq 0\end{aligned}$$

となる。ここで，最後の不等式は仮定 4 から明らかである。□

補題 2 と定理 2 は前節と同様に成り立つ。このとき，$\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$であり，$\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}$ だから，つぎの性質が成り立つことがわかる。

補題 6 $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$を満たす任意の$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$に対し

$$f_j(\boldsymbol{y})f_i(\boldsymbol{x}) \geq f_i(\boldsymbol{y})f_j(\boldsymbol{x}) \text{ すなわち } \begin{vmatrix} f_i(\boldsymbol{x}) & f_j(\boldsymbol{x}) \\ f_i(\boldsymbol{y}) & f_j(\boldsymbol{y}) \end{vmatrix} \geq 0 \tag{14}$$

$i < j$となる $(i, j = 1, 2, \cdots)$ 。また，任意の $i = 0, 1, 2, \cdots$に対して，$f_i(\boldsymbol{x})$ は$\boldsymbol{x}$に関してMTP_2である。

この補題が成り立つことから，前節の定理3が同様に成り立つことがわかる。

前節でも見たように，$X_1, \cdots, X_k$が独立なら，補題4から $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$を満たす任意の$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$に対し

$$f_j(\boldsymbol{y})f_i(\boldsymbol{x}) \geq f_i(\boldsymbol{y})f_j(\boldsymbol{x}) \text{ すなわち } \begin{vmatrix} f_i(\boldsymbol{x}) & f_j(\boldsymbol{x}) \\ f_i(\boldsymbol{y}) & f_j(\boldsymbol{y}) \end{vmatrix} \geq 0 \tag{15}$$

$i < j$となることが示された $(i, j = 1, 2, \cdots)$ 。このことは，$X_1, \cdots, X_k$が独立ならMTP_2の条件を満たすことは明らかである。逆に，(15) 式が成り立ち，任意の $i = 0, 1, 2, \cdots$に対して $f_i(\boldsymbol{x})$ は$\boldsymbol{x}$に関してMTP_2のとき，仮定4が成り立つ。すなわち，つぎの補題が成り立つ。

補題 7 $i < j$のとき $(i, j = 1, 2, \cdots)$，(15) 式が成り立ち，任意の $i = 0, 1, 2, \cdots$に対して $f_i(\boldsymbol{x})$ は$\boldsymbol{x}$に関してMTP_2のとき，仮定4が成り立つ。

このことは簡単な計算で示すことができる。また，$X_1, \cdots, X_k$が独立なら，これらの確率変数の独立性から，(12) 式と (13) 式が成り立つ。すなわち，つぎの性質が成り立つ。

補題 8 $X_1, \cdots, X_k$が独立なら，(15) 式が成り立てば，仮定4が成り立つ。

証明 $i \leq j$の場合を考える $(i, j = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 。すなわち，

$$f_i(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})f_j(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \geq f_j(\boldsymbol{y})f_i(\boldsymbol{x}) \tag{16}$$

を示す。簡単のために，$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ および $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_k)$ とし，$1 \leq l \leq m$のときは$x_l \geq y_l$とし，$m < l \leq k$のときは$x_l < y_l$とする。(16) 式は，

$$\prod_{l=1}^{m} f_i(y_l) \prod_{l=1}^{m} f_j(x_l) \geq \prod_{l=1}^{m} f_j(y_l) \prod_{l=1}^{m} f_i(x_l)$$

を示すことで得られる。このことは，補題4より導かれる。$j \leq i$ の場合も同様となる $(i, j = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 。□

定義 5 k変数関数$\varphi : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ が，$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$のとき，$\varphi(\boldsymbol{x}) \leq \varphi(\boldsymbol{y})$ となるならば $(\varphi(\boldsymbol{x}) \geq \varphi(\boldsymbol{y}))$，この関数を$\boldsymbol{x}$に関する非減少関数（非増加関数）という。

このとき，つぎの２つの性質（性質１と２）が成り立つことが，Holley [3], Kemperman [8], Preston [16], Karlin and Rinott[5, 6] などで示されている。

性質 1 (Holley [3], Kemperman [8], Preston [16], Karlin and Rinott[5, 6])

$X = (\Omega, \mathcal{B}, P)$ を可測空間とし，ある半順序で束となっているとする。また，μ_1とμ_2を X 上の絶対連続な確率測度とし，$f_i(x)$ をそれらの確率密度関数とする $(i = 1, 2)$ 。このとき，

$$f_1(x \wedge y) f_2(x \vee y) \geq f_1(x) f_2(y) \tag{17}$$

のとき

$$\int \varphi(x)\mu_1(dx) \leq \int \varphi(x)\mu_2(dx) \tag{18}$$

がすべての増加関数$\varphi(x)$ に対して成り立つ。このとき，μ_2はμ_1の dilation（拡大）であるという。

ここで，(18) 式は $X = \boldsymbol{R}^k$のときは，

$$\int \varphi(\boldsymbol{x}) f_1(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \leq \int \varphi(\boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

と表すことができる。この性質からつぎのことが得られる。

補題 9 $i \leq j$のとき $(i, j = 1, 2, 3, \cdots)$ ，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^k$に対して

$$f_i(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) f_j(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \geq f_j(\boldsymbol{y}) f_i(\boldsymbol{x})$$

ならば，$\boldsymbol{x}$に関する任意の増加関数$\varphi(\cdot)$ に対して

$$\int \varphi(\boldsymbol{x}) f_i(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \leq \int \varphi(\boldsymbol{x}) f_j(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

となる。

この性質からつぎの補題が成り立つことが簡単に示される。

補題 10 $\mathcal{S}$に含まれる$\boldsymbol{\Phi}$ と $\boldsymbol{\Psi}$ に対して$\boldsymbol{\Phi} \geq_1 \boldsymbol{\Psi}$ ならば，$\boldsymbol{x}$に関する任意の増加関数$\varphi(\cdot)$ に対して

$$\mathrm{E}_{\boldsymbol{\Psi}}[\varphi(\boldsymbol{X})] = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \int \varphi(\boldsymbol{x}) f_i(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \int \varphi(\boldsymbol{x}) f_i(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \mathrm{E}_{\boldsymbol{\Phi}}[\psi(\boldsymbol{X})]$$

となる。

性質 2 (Holley [3], Kemperman [8], Preston [16], Karlin and Rinott[5, 6])
k次元の確率変数$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_k)$ の同時確率密度関数を $f(x_1, \cdots, x_k)$ とし，これらの確率密度関数が MTP_2ならば，周辺分布 $f(x_1, \cdots, x_m)$ もまた MTP_2である $(m = 1, 2, \cdots, k)$ 。

この性質からつぎの補題が，同様に簡単な計算から示される。

補題 11 k次元の確率変数$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_k)$ の同時確率密度関数を $f(x_1, \cdots, x_k)$ とし，これらの確率密度関数が MTP_2ならば，確率変数 X_mの周辺分布 $f(x_m)$ は TP_2である $(m = 1, 2, \cdots, k)$ 。

定義 6 Xを束が定義された可測空間とする。また，μ_1とμ_2を X 上の絶対連続な確率測度とし，$f_i(x)$ をそれらの密度関数とする $(i = 1, 2)$ 。このとき，$x \le y$のとき

$$\varphi_1(x) \le \varphi_2(y)$$

となる X上の 2 つの非負可測関数 $\varphi_i(x)$ に対して $(i = 1, 2)$

$$\int \varphi_1(x)\mu_1(dx) \le \int \varphi_2(x)\mu_2(dx) \tag{19}$$

が成り立つとき，μ_2はμ_1の strong dilation という。

ここで，$X = \boldsymbol{R}^k$のときは (19) 式は

$$\int \varphi_1(\boldsymbol{x})f_1(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \le \int \varphi_2(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

と表せる。この定義は，前の性質（性質 1）より強い性質である。また，Xを可測空間で束となるものとし，(17) 式が成り立てばμ_2はμ_1の strong dilation となるとき，この空間 Xを FKG(Fortuin, Kasteleyn and Ginibre)–空間という。

性質 3 (Holley [3]) Xを束が定義された可測空間とする。また，μを X 上の絶対連続な確率測度とし，$f(x)$ をその密度関数とする。このとき，$x, y \in X$ならば

$$f(x \wedge y)f(x \vee y) \ge f(x)f(y)$$

が成り立つとする。

いま，$\varphi(x)$ と$\psi(x)$ を Xで積分が定義されている増加関数とする。このとき，

$$\int \varphi(x)\psi(x)\mu(dx) \ge \left\{\int \varphi(x)\mu(dx)\right\}\left\{\int \psi(x)\mu(dx)\right\} \tag{20}$$

となる。

ここで，$X = \boldsymbol{R}^k$のときは(20)式は

$$\int \varphi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \geq \left\{\int \varphi(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right\}\left\{\int \psi(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right\} \tag{21}$$

と表すことができる。これらの不等式(20)と(21)をFKG–inequalityという[2]。

ここで得られた性質を簡単な最適停止問題に適応してみよう。n期間の最適停止問題を考え，それぞれの期でk個の確率変数の標本値$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k)$を観測して，その値をもとに停止するかどうかを決定する。これらの観測値は，ある不完備情報のマルコフ連鎖の状態に依存し，この状態についての情報は状態空間上の確率分布で表される。一方，これらk個の確率変数は互いに独立ではなくてもよいとする。停止すれば利得$\varphi(\boldsymbol{x})$を得て終了し，そうでなければこれらの観測値をもとに，マルコフ連鎖の状態について学習を行い，新たな情報をもとにしてつぎの期以降の決定を行う。ここで，関数$\varphi(\boldsymbol{x})$は$\boldsymbol{x}$に関する増加関数とする。このとき，不完備情報のマルコフ連鎖についての情報が$\boldsymbol{\Phi}$のとき，n期にわたって最適に振る舞って得られる総期待利得をv_nで表せば，この値は最適性の原理により，つぎのような再帰方程式を満足する。

$$v_n(\boldsymbol{\Phi}) = \mathrm{E}_{\boldsymbol{\Phi}}[v_n(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{X})] \tag{22}$$

$$v_n(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x}) = \max\left\{\varphi(\boldsymbol{x}), v_{n-1}(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}}, \boldsymbol{x}))\right\} \tag{23}$$

このこととこれまでに得られた性質から，つぎの性質が求められる。

補題 12 $v_n(\boldsymbol{\Phi})$は$\boldsymbol{\Phi}$に関して増加する関数である。すなわち，$\boldsymbol{\Phi} \leq \boldsymbol{\Psi}$ならば，$v_n(\boldsymbol{\Phi}) \leq v_n(\boldsymbol{\Psi})$である。

補題 13 $v_n(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$は$\boldsymbol{\Phi}$に関して増加する関数である。また，$\boldsymbol{x}$関しても増加する関数である。すなわち，$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ならば，$v_n(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x}) \leq v_n(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{y})$である。

これらの性質はnに関する帰納法で示される。$n = 1$のときは明かである。$n-1$より小さい値に対してこれらの性質が成り立つとする。定理4から，$\boldsymbol{\Phi} \geq_l \boldsymbol{\Psi}$ならば$T\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\,\boldsymbol{x}\right) \geq_l T\left(\overline{\boldsymbol{\Psi}}\middle|\,\boldsymbol{x}\right)$だから，$v_n(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$は$\boldsymbol{\Phi}$に関して増加する関数となる。一方，補題6から定理3が成り立ったから，$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ならば$T\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\,\boldsymbol{x}\right) \leq_l T\left(\overline{\boldsymbol{\Phi}}\middle|\,\boldsymbol{y}\right)$となる。したがって，帰納法の仮定より$v_n(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$は，$\boldsymbol{x}$関して増加する関数である。したがって，補題13で得られた結果と，補題10から補題12が得られる。

つぎに$\boldsymbol{R}^k$に含まれる領域$S_n(\boldsymbol{\Phi})$を

$$S_n(\boldsymbol{\Phi}) = \left\{\boldsymbol{x}|\varphi(\boldsymbol{x}) \geq v_{n-1}(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}}, \boldsymbol{x}))\right\}$$

で定義する。すなわち，この領域はこの最適停止問題の停止領域であり，この問題の最適政策を決定するものである。この領域についても，同じようにつぎの性質が成り立つ。

補題 14 領域 $S_n(\boldsymbol{\Phi})$ に対し，$\boldsymbol{\Phi} \leq \boldsymbol{\Psi}$ ならば，$S_n(\boldsymbol{\Psi}) \subset S_n(\boldsymbol{\Phi})$ である。

この性質は，補題 13から $v_n(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ は$\boldsymbol{\Phi}$に関して増加する関数となり，$\boldsymbol{\Phi} \leq \boldsymbol{\Psi}$ ならば，

$$\varphi(\boldsymbol{x}) \geq v_{n-1}(T(\overline{\boldsymbol{\Psi}}, \boldsymbol{x})) \geq v_{n-1}(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}}, \boldsymbol{x}))$$

となることからわかる。

参考文献

[1] M. Brown and H. Solomon, Optimal Issuing Policies under Stochastic Field Lives, *Journal of Applied Probability*, vol. 10, 761–768, 1973.

[2] Fortuin, C. M., Kasteleyn, P. W. and Ginibre, J., Correlation Inequalities on Some Partailly Ordered Sets, *Communications on Mathematical Physics*, vol. 22, 89–103, 1971.

[3] R. Holley, Remarks on the FKG Inequaliteis, *Communications in Mathematical Physics*, vol. 36, pp. 227–231, 1974.

[4] S. Karlin, *Total Positivity*, Stanford University Press, Stanford, California, 1968.

[5] S. Karlin and Y. Rinott, Class of Orderings of Measures and Related Correlation Inequalities I : Multivariate Totally Positive Distributions, *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 10, 467–498, 1980.

[6] S. Karlin and Y. Rinott, Total Positivity Properties of Absolute Value Multinomial Variables with Applications to Confidence Interval Estimates and Related Probabilistic Inequalities, *The Annals of Statistics*, vol. 9, 1035–1049, 1981.

[7] S. Karlin and H. M. Taylor, *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, New York, 1981.

[8] J. H. B. Kemperman, On the FKG-Inequality for Measures on a Partially Ordered Space, Indagationes Mathematicae, vol. 39, pp. 313–331, 1977.

[9] G. Monahan, Optimal Stopping in a Partially Observable Markov Processes with Costly Information, *Operations Research*, vol. 28, 1319–1334, 1980.

[10] T. Nakai, Optimal Stopping Problem in a Finite State Partially Observable Markov Chain, *Journal of Information & Optimization Sciences*, vol. 4, 159–176, 1983.

[11] T. Nakai, The Problem of Optimal Stopping in a Partially Observable Markov Chain, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 45, 425–442, 1985.

[12] T. Nakai, A Sequential Stochastic Assignment Problem in a Partially Observable Markov Chain, *Mathematics of Operations Research*, vol. 11, 230–240, 1986.

[13] T. Nakai, A Stochastic Ordering and Related Sequential Decision Problems, *Journal of Information & Optimization Sciences*, vol. 11, 49–65, 1990.

[14] T. Nakai, A Partially Observable Decision Problem under a Shifted Likelihood Ratio Ordering *Proceedings of the Australia–Japan Workshop on Stochastic Models in Engineering, Technology and Management* (Eds. S. Osaki and D. N. Pra Murthy), World Scientific Publishing, 413–422, 1993.

[15] 中井　達, 不完備情報の動的決定モデル, 九州大学出版会, 福岡, 1996.

[16] C. J. Preston, A Generalization of the FKG Inequaliteis, *Communications in Mathematical Physics*, vol. 36, pp. 233–241, 1974.

[17] S. M. Ross, Quality Control under Markovian Deterioration, *Management Science*, vol. 17, 587–596, 1971.

[18] S. M. Ross, *Stochastic Processes*, John-Wiley and Sons, New York, New York, 1983.

[19] D. Stoyan, *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, John wiley & Sons, New York, New York, 1983.